Третий многопредметный Турнир для школьников. 2017 год.
15 октября (личное участие) и 16 октября – 17 ноября (участие команд)

Конкурс по математическим играм

Выберите игру, которая вас больше заинтересовала, и попробуйте придумать для одного из игроков (первого или второго) стратегию, гарантирующую ему победу независимо от ходов соперника. Постарайтесь не только указать, как следует ходить, но и объяснить, почему при этом неизбежен выигрыш. Ответ без пояснений не учитывается.

Не пытайтесь решить все задания, сохраните время и силы для других конкурсов. Хороший анализ даже только одной игры позволит считать ваше участие в конкурсе успешным.

1. «Соседняя клетка». На клетчатой бумаге по сторонам клеточек обведено игровое поле.

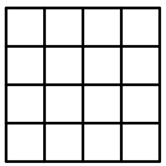
Играют двое, ходят по очереди. За ход можно закрасить внутри игрового поля по своему выбору любую одну ещё не закрашеную клетку, соседнюю с только что только что закрашенной соперником (расположенную от неё сверху, снизу, справа или слева). В самом начале игры первый игрок может закрасить любую клетку игрового поля по своему выбору.

Тот, кто не сможет сделать очередной ход по правилам, считается проигравшим.

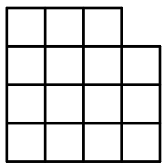
Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр?

Рассмотрите случаи, когда игровое поле — это:

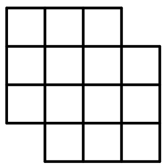
а) квадрат 4×4



б) квадрат 4×4 без угловой клетки



в) квадрат 4×4 без двух противоположных угловых клеток



2. «Библиотека». В библиотеке N различных книг и всего 2 читателя. В начале игры у читателей библиотечных книг нет.

Читатели ходят в библиотеку по очереди. Каждый раз читатель может взять любую одну библиотечную книгу или сдать любую одну книгу, которую он брал раньше.

Если читателю нечего ни взять, ни сдать, или же после его визита в библиотеку там остался такой набор книг, который раньше в библиотеке уже был — недовольный библиотекарь объявляет этого читателя проигравшим.

Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр?

Рассмотрите случаи, когда количество книг в библиотеке:

а) $N = 3$

б) $N = 5$

в) $N = 8$

г) N — любое конечное число.

3. «Кто станет директором?» Два ключевых акционера никак не могут согласовать кандидатуру генерального директора фирмы и поэтому используют такую процедуру его назначения:

• Первоначально есть N кандидатов на должность генерального директора.

• Первый акционер делит всех кандидатов по своему усмотрению на две группы (в каждой группе — не меньше одного кандидата) и передаёт на согласование второму.

• Второй акционер всех кандидатов из одной группы отклоняет, а другую группу кандидатов также делит на две и передаёт на согласование первому.

• Первый акционер всех кандидатов из одной группы отклоняет, а другую группу кандидатов также делит на две и передаёт на согласование второму.

• Второй акционер всех кандидатов из одной группы отклоняет, а другую группу кандидатов также делит на две и передаёт на согласование первому.

• ...

Такая процедура продолжается до тех пор, пока не останется только один кандидат (а все остальные будут отклонены), который и назначается генеральным директором.

Акционер, принявший окончательное решение об именно этой кандидатуре, считается выигравшим, а второй акционер — проигравшим.

Кто — начинающий (первый) акционер или его партнёр — сможет выиграть независимо от действий другого партнёра?

Рассмотрите случаи, когда:

а) $N = 5$

б) $N = 6$

в) $N = 7$

г) $N = 2017$

д) N — любое число, большее 1

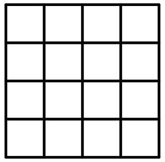
http://konkurs2017.turlom.info

konkurs2017@turlom.info

Ответы и решения

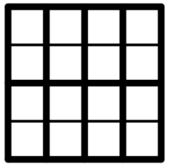
Задание 1. «Соседняя клетка»

а) Игровое поле — квадрат 4×4.



Выигрышная стратегия есть у второго игрока.

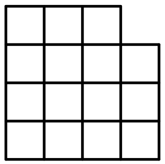
Разделим игровое поле на пары соседних клеток («доминошки»).



Как только первый игрок закрасит клетку в какой-либо паре клеток, второй игрок должен закрасить вторую клетку этой же пары. Эта клетка обязательно будет пустой, так как при игре второго игрока по указанной стратегии после хода второго игрока в каждой паре клеток либо обе клетки будут закрашены, либо обе не закрашены. Соответственно, после хода первого игрока всегда появляется пара клеток, в которой закрашена только одна клетка.

Раз ход второго игрока всегда возможен — он не проиграет. Следовательно, проиграет первый игрок, так как количество клеток ограничено.

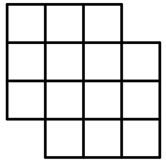
б) Игровое поле — квадрат 4×4 без угловой клетки.



Выигрышная стратегия есть у первого игрока.

Для доказательства этого достаточно поменять первого и второго игроков местами (переименовать их) и считать, что отсутствующая клетка — это первый ход первого игрока. Далее второй игрок (который был первым до переименования) выигрывает, пользуясь стратегией, описанной в пункте «а».

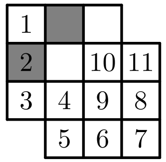
в) Игровое поле — квадрат 4×4 без двух противоположных угловых клеток.



Выигрышная стратегия есть у первого игрока. Приведём пример такой стратегии.

Первым ходом первый игрок должен закрасить угловую клетку (обозначена на рисунке цифрой «1»). Второй игрок в ответ может закрасить одну из двух клеток, закрашенных на рисунке серым цветом. Предположим, что это клетка, отмеченная цифрой «2». (Если был выбран другой вариант, то симметрично отразим рисунок и получим то же самое.)

Далее первый игрок должен вести игру, как показано на рисунке (цифрами обозначены номера ходов; соответственно, нечётные — первого игрока, чётные — второго).



Первый игрок всегда может вести игру именно таким способом, так как все ходы второго игрока всегда оказываются единственно возможными, что видно из рисунка. В результате игра заканчивается выигрышем первого игрока.

Комментарий. Хотя игровое поле в данном случае имеет чётное количество клеток, их нельзя разбить на пары соседних. Если бы это можно было сделать, то у второго игрока была бы такая же выигрышная стратегия, как в пункте «а».

Задание 2. «Библиотека»

Для всех N выигрывает первый читатель.

Возможная стратегия первого читателя. Ему нужно в первый визит взять какую-нибудь книгу, во второй визит эту книгу сдать, в третий визит опять эту книгу взять. И так всё время брать и сдавать одну и ту же книгу, а остальные книги вообще не трогать.

Соперник ему помешать не сможет, так как если взять книгу, которая только что была сдана первым читателем, набор книг в библиотеке повторится, что означает проигрыш.

Заметим, что все наборы книг в библиотеке встречаются в ходе игры парами, где соседние наборы отличаются только первой книгой. Если набор книг, возникший после хода первого игрока, ранее уже встречался, то и парный набор тоже встречался ранее. Это означает, что повтор произошёл уже после предыдущего хода второго игрока (который тем самым проиграл).

Количество возможных комбинаций книг в библиотеке конечно. Поэтому повтор обязательно возникнет и игра закончится. Раз первый читатель при данной стратегии проиграть не может, значит проиграет второй.

Задание 3. «Кто станет директором?»

Назовём число кандидатов в группе *плохим*, если оно при делении на 5 даёт остаток 2 или 3. Остальные числа назовём *хорошими*.

Сами числа 2 или 3 назовём *совсем плохими*. Один из акционеров проиграет в том и только в том случае, если ему на согласование достанутся две группы с *совсем плохим* количеством кандидатов. И ему ничего не останется, кроме как предложить в ответ группу из одного кандидата.

Оказывается, любое *хорошее* число можно представить в виде суммы двух *плохих*[1], а любое *плохое* число в виде суммы двух *плохих* представить нельзя[2].

Если первоначальное количество кандидатов N — *совсем плохое*, то первый акционер, очевидно, проигрывает за один ход.

Если N — *плохое* число, то первый акционер проигрывает. Как бы он не разделил кандидатов на группы, в одной из групп количество кандидатов обязательно будет *хорошим*. Партнёр именно эту группу разделит на две с *плохим* количеством кандидатов в каждой и вернёт на согласование, а вторую группу отклонит. И так первому акционеру всё время будут доставаться группы с *плохим* количеством кандидатов. Так как количество неотклонённых кандидатов с каждым ходом уменьшается, когда-нибудь первый акционер получит две группы с *совсем плохим* количеством кандидатов и следующим же ходом проиграет.

Если N — *хорошее* число, то первый акционер выигрывает. Он делит кандидатов на две группы с *плохим* количеством кандидатов в каждой. Далее игра происходит, как было описано выше, только первый и второй акционеры поменялись местами.

Итак, первый акционер проигрывает, если остаток от деления N на 5 равен 2 или 3, и выигрывает во всех остальных случаях.

---

[1] $2+3=5+0; \quad 3+3=5+1; \quad 2+2=4.$

[2] Сумма двух *плохих* чисел с остатками 2 и 2 от деления на 5 даёт остаток 4 от деления на 5; сумма чисел с остатками 2 и 3 даёт остаток 0; сумма чисел с остатками 3 и 3 даёт остаток 1.