Конкурс по математике

В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решать задачи более старших классов также разрешается, решение задач более младших классов при подведении итогов не учитывается).

1. (5–7) Каждый житель за́мка — либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда обманывает). Каждый житель замка говорит, что все остальные жители замка — лжецы. Сколько рыцарей живёт в этом замке?

2. (5–7) Из клетчатой бумаги вырезан прямоугольник 13×7 клеточек. Нарисуйте, как вырезать из него одну клеточку и оставшуюся часть разрезать на прямоугольники 2×3 клеточки.

3. (5–7) На рынке торгуют яблоками и грушами, каждый продавец сам установил цены за 1 штуку. Известно, что любой набор яблок и груш можно купить у какого-нибудь продавца за целое количество рублей. Обязательно ли на рынке найдётся такой продавец, который и яблоки, и груши продаёт за целое количество рублей за штуку?

4. (6–9) Имеется конечное число городов. Некоторые из них соединены дорогами, и из каждого города в каждый можно проехать по дорогам ровно одним способом (возможно, через какие-то другие города).

Назовём город тупиком, если из него выходит ровно одна дорога. Для города A самый дальний тупик — город B, а для города C самый ближний тупик — город D (города A и C различны и не являются тупиками).

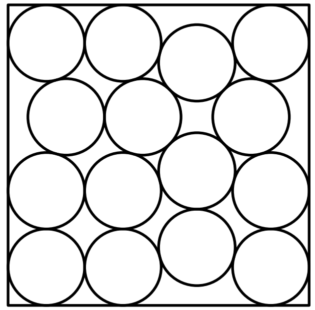
Обязательно ли расстояние AB больше расстояния CD? (Расстояния считаются вдоль дорог в километрах.)

5. (8–11) На плоскости построен отрезок длины $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+1$. Как с помощью циркуля и линейки (без делений) построить отрезок длины 1?

6. (8–11) Докажите, что у n-угольника не может быть больше чем $\dfrac{2n}{3}+1$ острых углов.

Примечание. Угол многоугольника называется острым, если его величина меньше 90°; углы больше 180° острыми не считаются.

7. (8–11) На рисунке показан квадрат минимально возможного размера, в котором можно разместить 15 кругов радиуса $R = 1$, и возможный вариант размещения таких кругов. (В любой квадрат меньшего размера 15 кругов радиуса 1 без наложения друг на друга не поместятся. Во всех местах, где на рисунке линии касаются друг друга, они действительно касаются, а не пересекаются и не образуют зазор.) Найдите длину стороны этого квадрата.



8. (9–11) В сказочном лесу есть эхо, которое искажает последовательности из звуков «А» и «У» следующим образом.

- «АУУУ» может превратиться в «УА» и наоборот;
- «АА» может исчезнуть или появиться в любом месте последовательности;
- «УУУУ» может исчезнуть или появиться в любом месте последовательности.

Все такие изменения могут происходить несколько раз.

Можно ли, крикнув «АУ», услышать в ответ «УА»?

9. (9–11) Крестики, нулики и треугольники ходят по очереди на клетчатой плоскости, каждый раз занимая одну любую ещё никем не занятую клетку. Нулики и треугольники тайно сговорились и хотят чтобы либо нулики либо треугольники поставили 100 своих фишек в ряд подряд. Докажите, что они могут это сделать.

Ответы и решения

Задача 1

В за́мке живёт 1 рыцарь.

Если бы в замке рыцарей не было вообще — то слова лжецов о том, что все остальные — лжецы, оказались бы правдой.

Если в замке кроме одного рыцаря есть ещё хотя бы один, то его слова о том, что все остальные — лжецы, оказались бы неправдой.

Если в замке 1 рыцарь и все остальные — лжецы, то условия задачи выполняются.

Замечание.

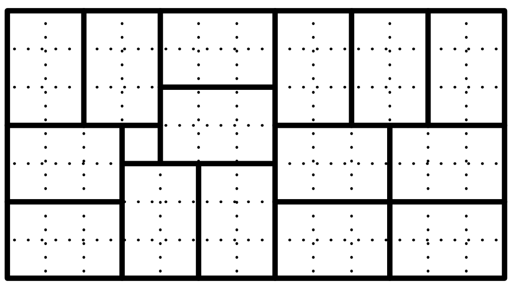
Если текст условия задачи понимать совсем формально (математики иногда так и делают), верным также можно считать ответ «0 рыцарей». Это возможно если в замке вообще никто не живёт, поэтому слова «каждый житель замка. . . » будут верными — независимо от того, что стоит на месте многоточия.

Если же, наоборот, текст условия задачи понимать в неформальном (разговорном) смысле, то условия задачи можно считать выполнеными для замка, в котором живёт только 1 лжец и больше никого. Слова этого лжеца «все остальные жители замка — лжецы» можно считать неправдой (как это и положено лжецу), полагая, что тем самым утверждается наличие в замке других жителей (которых на самом деле нет).

При проверке такие рассуждения считаются верными, но за их отсутствие оценка не снижается.

Задача 2

Возможный вариант решения показан на рисунке.



Задача 3

Не обязательно. Для выполнения условия задачи достаточно присутствия на рынке продавцов с такими ценами:

Продавец	Яблоки	Груши
1	0,5 руб/шт	1 руб/шт
2	1 руб/шт	0,5 руб/шт
3	0,5 руб/шт	0,5 руб/шт

Нужный торговец выбирается в зависимости от чётности количества покупаемых яблок и груш.

Если количество яблок и груш в сумме чётно, все их нужно купить у 3 продавца по цене 0,5 руб/шт.

Если же суммарное количество яблок и груш нечётно, то либо яблок, либо груш чётное количество (иначе у нас была бы сумма двух нечётных чисел, а это чётное число). В этом случае выбираем из 1 и 2 продавца того, у которого нужный в чётном количестве фрукт продаётся по цене 0,5 руб/шт, а другой — по цене 1 руб/шт.

Задача 4

Обязательно. Докажем, что $AB > CD$.

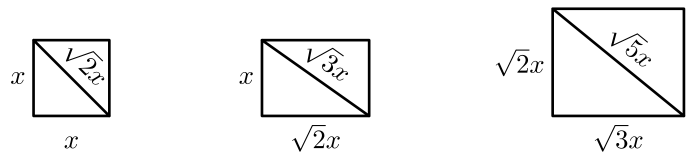
Из A в C ведёт единственный маршрут. Его можно продолжить до некоторого тупика E (так как C не тупик, то из него выходит вторая дорога; пойдём по ней, замкнуть путь мы не можем, идти бесконечно тоже — значит, придём в тупик). Тогда $AB \geqslant AE = AC + CE > CE \geqslant CD$, то есть $AB > CD$.

Задача 5

Введём обозначение: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + 1 = z$.

Возьмём на плоскости отрезок произвольной длины, которую обозначим x (в качестве такого отрезка можно взять, например, отрезок из условия или любой другой) и построим отрезок $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + 1\right) x = zx$.

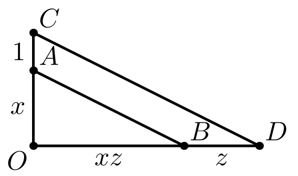
Воспользовавшись теоремой Пифагора, построим отрезок $\sqrt{2}x$ как диагональ квадрата со стороной x. Аналогично строятся отрезки $\sqrt{3}x$ и $\sqrt{5}x$ (как диагонали подходящих прямоугольников; нужные на последующем шаге длины сторон строятся на предыдущем шаге).



Сложив отрезки $\sqrt{2}x$, $\sqrt{3}x$, $\sqrt{5}x$ и x, можно построить отрезок длиной

$$\sqrt{2}x + \sqrt{3}x + \sqrt{5}x + x = x\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + 1\right) = xz$$

Теперь у нас есть отрезки с длинами x, z и xz. Используя соотношение $\dfrac{1}{x} = \dfrac{z}{xz}$, можно построить отрезок длины 1 с помощью теоремы Фалеса или подобия треугольников. С помощью циркуля и линейки мы умеем через данную точку (на рис. через точку D) проводить прямую, параллельную данной (на рисунке прямую $CD \parallel AB$).



Задача 6

Пусть у n-угольника x острых углов и s — сумма всех углов этого n-угольника. Тогда

$$s = 180^\circ \cdot (n-2)$$

$$90^\circ \cdot x + 360^\circ \cdot (n-x) > s$$

(каждый острый угол меньше 90°, а каждый из остальных $(n-x)$ углов меньше 360°).

Отсюда

$$90^\circ \cdot x + 360^\circ \cdot (n-x) > 180^\circ (n-2)$$

$$x + 4(n-x) > 2(n-2)$$

$$x + 4n - 4x > 2n - 4$$

$$-3x > -2n - 4$$

$$3x < 2n + 4$$

$$3x + 1 \leqslant 2n + 4$$

$$3x \leqslant 2n + 3$$

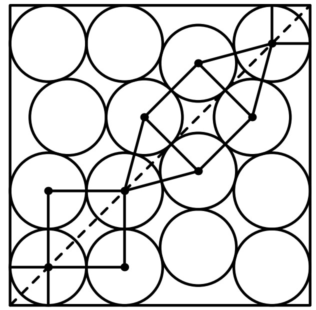
$$x \leqslant \frac{2n}{3} + 1$$

Задача 7

На рисунке точками обозначены центры окружностей радиуса R. Расположение окружностей симметрично относительно обозначенной пунктиром диагонали квадрата (докажем это позднее).

Диагональ складывается из 6 отрезков (снизу вверх, слева направо):

1) $\sqrt{2}R$ (диагональ квадрата со стороной R);
2) $2\sqrt{2}R$ (диагональ квадрата со стороной $2R$);
3) $\sqrt{3}R$ (высота равностороннего треугольника со стороной $2R$);
4) $2R$ (отрезок равен стороне квадрата, которая равна $2R$);
5) $\sqrt{3}R$ (высота равностороннего треугольника со стороной $2R$);
6) $\sqrt{2}R$ (диагональ квадрата со стороной R).

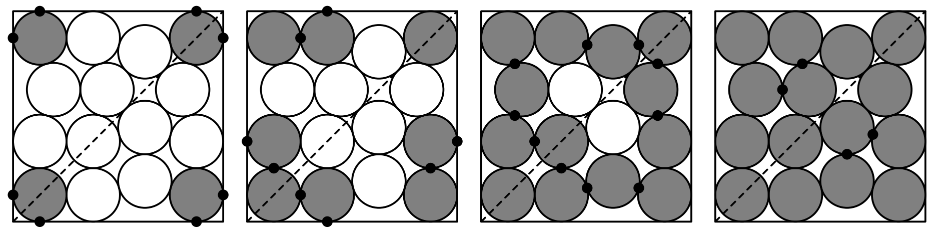


Сторона квадрата в $\sqrt{2}$ меньше диагонали и равна

$$\frac{\sqrt{2}R + 2\sqrt{2}R + \sqrt{3}R + 2R + \sqrt{3}R + \sqrt{2}R}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2}{\sqrt{2}} R =$$

$$= \left(4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}\right) R = \left(4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}\right) \cdot 1 = 4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

Теперь докажем симметричность расположения окружностей односительно диагоналей квадрата. На левом рисунке закрашенные окружности расположены симметрично, так как «прикреплены» симметричным образом к симметричным элементам квадрата.



Далее (слева направо) показано обоснование симметричности конструкции из вписанных окружностей. Та часть конструкции, симметричность которой уже установлена, на рисунке закрашивается серым. Жирными точками отмечаются места симметричного «прикрепления» добавляемых окружностей, что обосновывает их симметричное расположение.

Задача 8

Ответ: нельзя.

Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат (x, y).

Пусть «А» и «У» — такие преобразования с точкой (x, y):

$$(x, y) \xrightarrow{\text{А}} (-x, y)$$

$$(x, y) \xrightarrow{\text{У}} (y, -x)$$

Тогда «АА» является тождественным преобразованием:

$$(x,y)\xrightarrow{\text{А}}(-x,y)\xrightarrow{\text{А}}(x,y)$$

«УУУУ» также является тождественным преобразованием:

$$(x,y)\xrightarrow{\text{У}}(y,-x)\xrightarrow{\text{У}}(-x,-y)\xrightarrow{\text{У}}(-y,x)\xrightarrow{\text{У}}(x,y)$$

Преобразования «УА» и «АУУУ» являются одним и тем же преобразованием (всегда приводят к одинаковому результату)

$$(x,y)\xrightarrow{\text{У}}(y,-x)\xrightarrow{\text{А}}(-y,-x)$$

$$(x,y)\xrightarrow{\text{А}}(-x,y)\xrightarrow{\text{У}}(y,x)\xrightarrow{\text{У}}(x,-y)\xrightarrow{\text{У}}(-y,-x)$$

Таким образом, разрешённые в условии задачи замены «А» и «У» не меняют результат преобразования, кодирующегося последовательностью «А» и «У». А преобразования «АУ» и «УА» не являются тождественными, приводят к различным результатам.

$$(x,y)\xrightarrow{\text{А}}(-x,y)\xrightarrow{\text{У}}(y,x)$$

$$(x,y)\xrightarrow{\text{У}}(y,-x)\xrightarrow{\text{А}}(-y,-x)$$

Замечание. Для рассмотренных преобразований «А» и «У» можно предложить геометрическую интерпретацию:
«А» — преобразование осевой симметрии относительно оси y,
«У» — поворот относительно начала координат на 90° по часовой стрелке.

Задача 9

Построение ряда из 100 нуликов или 100 треугольников проведём за несколько этапов. В начале каждого этапа (обозначим номер этапа буквой i) у нас будет X_i прямоугольных полосок для нуликов, в которых уже стоит по n_i штук «0», и X_i прямоугольных полосок для треугольников по t_i штук «$\triangle$» в каждом (количества «0» и «$\triangle$» будем обозначать буквами n и t по первым буквам слов «нулик» и «треугольник»).

Итак, на первом этапе начертим на клетчатой плоскости X_1 прямоугольных полосок размером 1×100 клеточек для нуликов и ещё X_1 прямоугольных полосок 1×100 для треугольников (значение числа X_1 будет определено далее в ходе решения). Нарисованные полоски, естественно, не должны пересекаться друг с другом. Если в какой-то полоске в ходе игры будет поставлен крестик, то там уже не получится построить ряд нуликов или треугольников длиной 100: назовём такие полоски *испорченными.*

Значения n и t на первом этапе нулевые ($n_1=t_1=0$, к началу первого этапа в полосках нет ни одного знака «0» и «$\triangle$»).

Стратегия 1 этапа. На первом этапе нулики, треугольники и крестики делают по $X_1/2$ ходов. За эти ходы нулики должны поставить «0» в $X_1/2$ полосок из своих X_1 полосок, а треугольники — поставить «$\triangle$» в $X_1/2$ полосок из своих X_1 полосок.

После выполнения всех ходов первого этапа у нас получится 4 типа полосок (из которых некоторые могут быть испорчены крестиками), по $X_1/2$ штук каждого типа:
1) с одним нуликом;
2) предназначенные для нуликов, но пока без нуликов;
3) с одним треугольником;
4) предназначенные для треугольников, но пока без треугольников.

При этом крестики могли испортить более половины полосок только одного типа из этих четырёх (чтобы испортить более половины полосок двух разных типов, потребовалось бы более $2\cdot X_1/4=X_1/2$ ходов). То есть среди неиспорченных полосок у нас заведомо есть либо $X_1/4$ полосок 1 типа и $X_1/4$ полосок 4 типа, либо $X_1/4$ полосок 2 типа и $X_1/4$ полосок 3 типа.

Итак, к началу 2 этапа у нас осталось $X_2=X_1/4$ неиспорченных полосок для «0» по n_2 нуликов в каждой и X_2 неиспорченных полосок для «$\triangle$» по t_2 треугольников в каждой, причём

$$n_2+t_2=n_1+t_1+1$$

(Остальные полоски — как испорченные, так и неиспорченные — мы в игре больше использовать не будем.)

Последующие этапы. На каждом из последующих этапов (i — номер рассматриваемого этапа) действуем аналогично этапу 1. К моменту начала этапа у нас есть X_i полосок для нуликов (по n_i «0» в каждой) и столько же полосок для треугольников (по t_i «$\triangle$» в каждой). Нулики, треугольники и крестики делают по $X_i/2$ ходов. Нулики и треугольники за эти ходы ставят свои знаки в $X_i/2$ «своих» полосок. В результате получаются полоски 4 типов, по $X_i/2$ штук каждого типа, содержащие:
1) нулики (по n_i+1 штук);
2) нулики (по n_i штук);
3) треугольники (по t_i+1 штук);
4) треугольники (по t_i штук).

Как и на этапе 1, выбираем из них по $X_{i+1}=X_i/4$ неиспорченных полосок либо 1 и 4 типов, либо 2 и 3 типов: в каждой полоске для «0» по n_{i+1} нуликов, в каждой полоске для «$\triangle$» — по t_{i+1} треугольников, причём

$$n_{i+1}+t_{i+1}=n_i+t_i+1$$

Мы видим, что на каждом этапе количество X остающихся в игре полосок каждого типа уменьшается в 4 раза, а сумма $(n+t)$ возрастает на 1. Как только n или t становится равным 100 — наша цель достигнута и игра заканчивается. Заметим, что для этого потребуется не более 200 этапов (если $n+t>200$, то хотя бы одно из чисел n и t больше 100). Поэтому, если в начале игры взять $X_1=4^{200}$ полосок каждого типа, то к концу игры ($\leqslant$200 этапов) они не закончатся.