Конкурс по физике

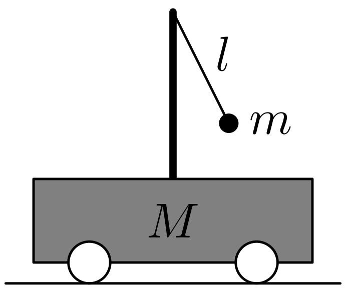
В скобках после номера задачи указаны классы, которым эта задача рекомендуется. Можно решать и задачи старших классов. Задачи младших классов на оценку не влияют.

Ученикам *7 класса и младше* достаточно решить **одну** задачу своего класса, ученикам *8–11 классов* — **две** задачи своего класса.

1. (5–8) Таня шла из дома в школу и возвращалась одной и той же дорогой, но на обратном пути её скорость была на 25% больше. На сколько процентов меньше времени потратила Таня на дорогу домой по сравнению со временем на дорогу в школу?

2. (5–9) Как вы думаете, зачем делают алюминиевые лопаты? (Учитывая, что стальная лопата такой же формы получается прочнее, долговечнее и дешевле.)

3. (8–10) На тележке массы M установлен маятник, состоящий из невесомой нерастяжимой нити подвеса длины l и грузика массы m. Первоначально тележка и грузик неподвижны, нить подвеса вертикальна. Тележка может свободно перемещаться вдоль горизонтальной прямой. Ускорение свободного падения g. Какую минимальную скорость v нужно сообщить грузику вдоль этой прямой для того, чтобы через какое-то время нить подвеса заняла горизонтальное положение?



4. (8–11) В пространстве расположены два точечных электрических заряда. В точке O суммарная напряжённость электрического поля этих зарядов равна 0. В некоторой точке X векторы напряжённости электрического поля каждого из зарядов равны. Докажите, что сумма этих векторов (то есть напряжённость электрического поля в точке X, созданного двумя этими зарядами), лежит на прямой, проходящей через точки X и O.

5. (8–11) Почему относительная влажность атмосферы Земли обычно бывает меньше 100%, хотя на Земле имеется большая поверхность водоёмов, вполне достаточная для полного насыщения атмосферы водяным паром?

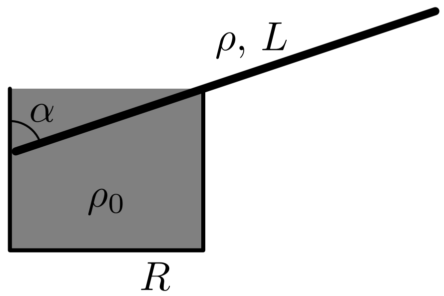
6. (9–11) Зажжённая свеча стоит на расстоянии $2d$ от стены. Посередине между свечой и стеной поставили небольшой прозрачный шар радиуса R, при этом на стене появилось резкое изображение пламени свечи. Чему равен показатель преломления вещества, из которого сделан шар? Считайте, что в построении изображения не участвуют части шара, далёкие от прямой «свеча—изображение».

7. (9–11) Палочка длины L из материала плотности ρ (масса равномерно распределена по длине) расположена в цилиндрическом стакане радиуса R, до краёв наполненном водой плотности ρ_0. Она опирается на край стакана и упирается концом в стенку стакана изнутри с противоположной стороны. Трения между стаканом и палочкой нет.

Оказывается, что при выполнении условий

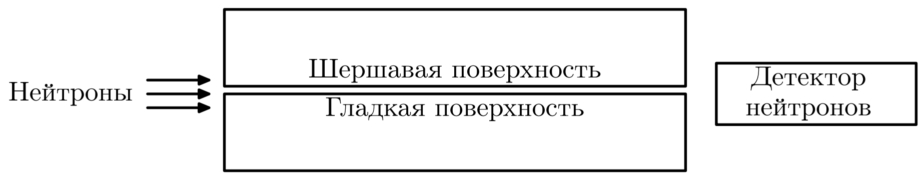
$$\frac{L}{R} = 5\frac{\rho_0}{\rho} = 9{,}6$$

палочка имеет единственное положение равновесия. Найдите угол α между палочкой и стенкой стакана в этом положении равновесия.



8. (11) Свободные нейтроны, движущиеся с небольшими скоростями (единицы метров в секунду), способны при взаимодействии с поверхностью вещества упруго от неё отражаться. Такое поведение связано с тем, что длина волны де Бройля таких нейтронов существенно больше межатомного расстояния, поэтому они взаимодействуют одновременно с большим количеством атомов поверхности. Такие нейтроны можно хранить в замкнутом сосуде достаточно продолжительное время (более 10 минут).

На рисунке показана упрощённая схема эксперимента с такими нейтронами. Поток нейтронов пропускают через горизонтальную щель, нижняя поверхность которой гладкая, а верхняя — шершавая, рассеивает попавшие на неё нейтроны в случайных направлениях.



Оказалось, что при зазоре между гладкой и шершавой поверхностями менее определённой ширины нейтроны практически не попадают на детектор, а далее при плавном увеличении ширины зазора интенсивность потока нейтронов на детекторе возрастает ступенчато.

Как можно объяснить такие результаты эксперимента?

Ответы и решения

Задача 1

По дороге в школу

$$\text{расстояние} = \text{скорость} \times \text{время}$$

По дороге обратно расстояние то же. Скорость увеличилась на 25% то есть была умножена на

$$1 + \frac{25}{100} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Чтобы расстояние осталось тем же, время нужно разделить на $\frac{5}{4}$. Или, что то же самое, умножить на

$$\frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5} = 1 - \frac{20}{100}$$

То есть время уменьшилось на 20%.

Задача 2

Стальная лопата при ударе о какой-нибудь твёрдый материал (камень, бетон, металл) может высекать искры, то есть отколовшиеся маленькие кусочки от поверхности лопаты или предмета, по которому лопатой стукнули. Маленький кусочек в момент удара легко нагревается до высокой температуры (для этого не нужно много энергии). Сильно нагретый кусочек от этого светится и называется искрой. Иногда такие кусочки загораются, отчего разогреваются и светятся ещё ярче.

Такие искры опасны при работе лопатой с горючими и взрывчатыми материалами или в пожароопасных местах (рядом с автозаправками, газовым оборудованием и т. п.).

Алюминиевой лопатой искры не высекаются. Алюминий намного мягче стали, им или от него намного труднее отколоть маленький кусочек. При ударе он не крошится, а сминается. При этом нагревается не маленький участок металла, а тепло равномерно распределяется по всему сминаемому объёму металла, и температура нагрева оказывается намного меньше. Кроме того, поверхность алюминия на воздухе очень быстро окисляется и покрывается оксидной плёнкой, которая не даёт окисляться дальше и загореться.

Поэтому в условиях пожарной опасности алюминиевой лопатой работать безопаснее, чем стальной.

Возможны и другие варианты ответа. Например, стальная лопата притягивается к магниту, а алюминиевая — нет, поэтому ей можно работать рядом с сильным магнитом. Также алюминиевой лопатой лучше, чем стальной, сгребать снег с мостовой, которую нежелательно повреждать из-за её архитектурной и исторической ценности.

Задача 3

Если нить подвеса горизонтальна, то горизонтальная проекция скорости грузика должна быть равна скорости тележки (так как нить подвеса нерастяжима). Обозначим эту скорость v_1.

На систему не действуют никакие силы в горизонтальном направлении, поэтому импульс в этом направлении сохраняется, то есть

$$mv = (M+m)v_1$$

$$v_1 = v\frac{m}{M+m}$$

Мы ищем минимально возможное значение v, соответствующее минимальной возможной кинетической энергии грузика в начальный момент, то есть минимальной кинетической энергии всей системы (так как тележка в начальный момент времени неподвижна). Для этого необходимо, чтобы у грузика при горизонтальном расположении нити подвеса вертикальная компонента скорости была нулевой (любое увеличение этой компоненты увеличивает кинетическую энергию).

То есть в интересующий нас момент времени (когда нить подвеса горизонтальна) скорости тележки и грузика равны. Тогда по закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(M+m)v_1^2}{2} + mgl$$

$$mv^2 = (M+m)v_1^2 + 2mgl$$

$$mv^2 = (M+m)\left(v_1\right)^2 + 2mgl$$

$$mv^2 = (M+m)\left(v\frac{m}{M+m}\right)^2 + 2mgl$$

$$mv^2 = (M+m)v^2\frac{m^2}{(M+m)^2} + 2mgl$$

$$mv^2 = v^2\frac{m^2}{M+m} + 2mgl$$

$$v^2 = v^2\frac{m}{M+m} + 2gl$$

$$v^2 - v^2\frac{m}{M+m} = 2gl$$

$$v^2\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) = 2gl$$

$$v^2\left(\frac{M+m}{M+m} - \frac{m}{M+m}\right) = 2gl$$

$$v^2\frac{M}{M+m} = 2gl$$

$$v^2 = 2gl\frac{M+m}{M}$$

$$v = \sqrt{2gl\frac{M+m}{M}} = \sqrt{2gl\left(1+\frac{m}{M}\right)}$$

Задачу мы решили в предположении, что нить всё время была натянута. Про ненатянутую нить нельзя сказать, что она расположена горизонтально. Ненатянутая нить не задаёт соотношения между скоростями предметов, которые она связывает, использованного в решении задачи. Наконец, если нить какое-то время была ненатянута, а затем натянулась опять, в этот момент может произойти неупругое взаимодействие (нить неупруга и нерастяжима по условию), что приведёт к потерям механической энергии и невозможности применить закон сохранения энергии.

Как известно, нить подвеса обычного математического маятника (у которого точка подвеса неподвижна или, в зависимости от выбранной системы отсчёта, движется с постоянной скоростью) при отклонении на углы не более 90° остаётся всё время натянутой. Так происходит потому, что при таких углах проекция на направление нити подвеса силы тяжести, действующей на грузик, направлена от точки подвеса. Поэтому как только нить подвеса (гипотетически) перестанет быть натянутой, сила тяжести придаст грузику соответствующее ускорение и он окажется от точки подвеса на расстоянии больше длины нити. Чего, разумеется, не может быть.

В нашей системе, рассмотренной в задаче, маятник не совсем обычный: его точка подвеса движется с ускорением. Но это ускорение создаётся исключительно силой натяжения нити подвеса: никаких других нескомпенсированных сил на тележку не действует. Поэтому чем меньше сила натяжения, тем меньше это ускорение и тем больше наш маятник «похож» на обычный математический маятник.

Если же (гипотетически) сила натяжения нити уменьшится до нуля, то и ускорение станет нулевым. Получится обычный математический маятник, у которого нить подвеса, как объяснено выше, провиснуть не сможет.

Задача 4

Заметим, что вектор, равный сумме двух равных по величине векторов, направлен вдоль биссектрисы угла, образованного этими двумя векторами.

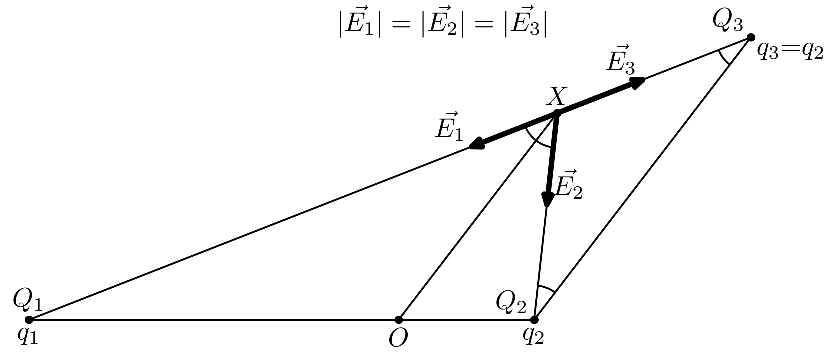
Для двух точечных зарядов будем использовать обозначения q_1 и q_2, а для точек, в которых эти заряды расположены — обозначения Q_1 и Q_2 соответственно. Для определённости предположим, что $q_1 < 0$ и $q_2 < 0$.

В этих обозначениях нам нужно доказать, что точка O лежит на биссектрисе угла $\angle Q_1XQ_2$.

В точке O по условию суммарное электрическое поле этих зарядов равно 0. То есть точка 0 лежит на отрезке Q_1Q_2 и $\dfrac{q_1}{Q_1O^2} = \dfrac{q_2}{Q_2O^2}$.

В точке X по условию заряды q_1 и q_2 создают равные по величине напряжённости электрического поля $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, то есть $\dfrac{q_1}{Q_1X^2} = \dfrac{q_2}{Q_2X^2}$.

Выберем такую точку Q_3, что X лежит на отрезке Q_1Q_3 и $OX||Q_2Q_3$, и расположим в этой точке электрический заряд $q_3 = q_2$.



Заряды q_1 и q_3 будут создавать в точке X равные по величине и противоположные по направлению напряжённости электрического поля $\vec{E}_1 = -\vec{E}_3$, так как $\dfrac{q_1}{Q_1X^2} = \dfrac{q_2}{Q_2X^2}$ и по теореме Фалеса $\dfrac{Q_1O}{Q_1X} = \dfrac{Q_2O}{Q_3X}$, откуда следует равенство $\dfrac{q_1}{Q_1X^2} = \dfrac{q_3}{Q_3X^2}$.

Заряды q_2 и q_3 равны по величине между собой и создают в точке X равные по величине напряжённости электрического поля (обе они равны напряжённости электрического поля, создаваемого в точке X зарядом q_1). Поэтому $XQ_2 = XQ_3$.

Дальше задача решается геометрически. Докажем по цепочке равенство отмеченных на рисунке углов:

$$\angle Q_1XO \overset{(1)}{=} \angle XQ_3Q_2 \overset{(2)}{=} \angle XQ_2Q_3 \overset{(3)}{=} \angle Q_2XO$$

(1) углы, образованные двумя параллельными отрезками ($XO||Q_3Q_2$) с третьим (Q_1Q_3);

(2) углы при основании равнобедренного треугольника ($XQ_2 = XQ_3$);

(3) внутренние накрестлежащие углы ($XO||Q_3Q_2$).

Таким образом, $\angle Q_1XO = \angle Q_2XO$, что и требовалось доказать.

Для наглядности рисунок с самого начала построен так, что на нём выполняются все полученные в процессе решения геометрические соотношения.

Задача 5

Условия в атмосфере по разным причинам меняются. Если относительная влажность оказалась выше 100%, то «лишняя» вода выпадает в виде дождя (или снега). При обратном изменении условий может оказаться, что воду «обратно» взять уже негде.

В частности, чтобы поднять воду в атмосферу с поверхности водоёма, насыщенный до 100% водяными парами воздух должен подняться вверх.

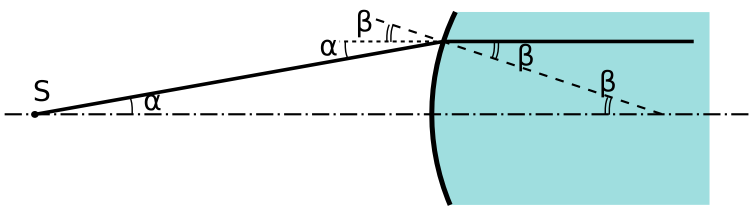
Но при этом происходит его расширение (давление с высотой уменьшается) и охлаждение, в результате чего вода выпадает в виде осадков.

Если же температура воздуха со 100% относительной влажностью, наоборот, повысится по каким-то причинам, то относительная влажность также станет меньше 100%.

Задача 6

Будем считать пламя и его изображение точечными. Главной оптической осью системы является прямая «свеча–изображение». Система получается симметричной относительно центра шара, а следовательно, между преломлениями на поверхности шара лучи идут параллельно главной оптической оси.

Рассмотрим луч, падающий на участок поверхности шара вблизи главной оптической оси. Если угол между лучом и осью α, а между осью и радиусом шара, проведённым в точку падения луча (то есть нормалью к границе раздела) β, то угол падения равен $\alpha+\beta$, а угол преломления — β.



Показатель преломления можно рассчитать из закона Снеллиуса:

$$n=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}.$$

Если учесть, что изображение создаётся параксиальными частями поверхности шара, то смещением точки падения луча вдоль оптической оси можно пренебречь. Тогда

$$n\approx\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}+1\approx\frac{R}{d-R}+1=\frac{d}{d-R}.$$

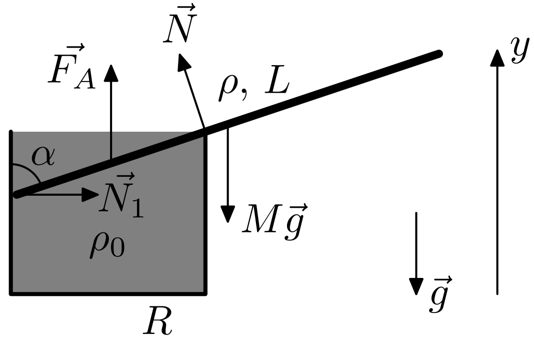
Задача 7

На палочку действуют силы :

1) сила тяжести $M\vec{g}$, приложенная к центру палочки и направленная вертикально вниз (M — масса палочки);

2) сила реакции стенки стакана $\vec{N}_1$ (действует на упирающийся в стенку конец палочки; ввиду отсутствия силы трения между стенкой и палочкой направлена перпендикулярно стенке, т. е. горизонтально);

3) сила реакции края стакана $\vec{N}$ (ввиду отсутствия трения направлена перпендикулярно палочке);



4) сила Архимеда $F_A=\rho_0 gv$, где v — объём той части палочки, которая находится в воде. Пусть m — масса этой части палочки, l — длина этой части, тогда

$$F_A=\rho_0 gv=\rho_0 g\frac{m}{\rho}=\rho_0 g\frac{\frac{l}{L}M}{\rho}=\rho_0 g\frac{lM}{\rho L}=\rho_0 g\frac{\frac{2R}{\sin\alpha}M}{\rho L}=\frac{2\rho_0 gRM}{\rho L\sin\alpha}$$

Введём обозначения:

$$a=\frac{L}{R}=9{,}6;\qquad b=\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{a}{5}=\frac{9{,}6}{5}=1{,}92;\qquad s=\sin\alpha$$

В этих обозначениях

$$F_A=\frac{2Mgb}{as}$$

Заметим, что сила реакции $\vec{N}$ составляет с горизонталью такой же угол, какой палочка составляет с вертикалью, то есть угол α, а вертикальная проекция этой силы $(\vec{N})_y=N\sin\alpha$

В состоянии равновесия сумма всех сил, действующих на палочку, равна 0. Сумма проекций этих сил на вертикальную ось y также равна 0.

$$(\vec{N}_1)_y+(\vec{F_A})_y+(\vec{N})_y+(M\vec{g})_y=0$$

$$0+\frac{2Mgb}{as}+Ns-Mg=0$$

Отсюда

$$Ns=Mg-\frac{2Mgb}{as}=Mg\left(1-\frac{2b}{as}\right)\tag{1}$$

Сумма моментов всех сил, действующих на палочку, относительно упирающегося в стенку стакана левого конца палочки также должна быть равна 0:

$$\mathbf{M}_{\vec{N}_1}+\mathbf{M}_{\vec{F_A}}+\mathbf{M}_{\vec{N}}+\mathbf{M}_{M\vec{g}}=0$$

$$0+R\frac{2Mgb}{as}+\frac{2R}{s}N-Mg\frac{L}{2}s=0$$

$$\frac{2MgRb}{as}+\frac{2RN}{s}-\frac{MgLs}{2}=0$$

Умножим это уравнение на $\dfrac{s^3}{2R}$.

$$\frac{Mgbs^2}{a}+s\cdot Ns-\frac{MgLs^4}{4R}=0$$

$$\frac{Mgbs^2}{a}+Ns^2-\frac{Mgs^4}{4}\cdot\frac{L}{R}=0$$

$$\frac{Mgbs^2}{a}+s\cdot Ns-\frac{Mgas^4}{4}=0$$

Подставим сюда ранее найденное выражение для Ns из формулы (1) и затем упростим полученное выражение.

$$\frac{Mgbs^2}{a}+s\cdot Mg\left(1-\frac{2b}{as}\right)-\frac{Mgas^4}{4}=0$$

$$\frac{bs^2}{a}+s\left(1-\frac{2b}{as}\right)-\frac{as^4}{4}=0$$

$$\frac{a}{4}s^4-\frac{b}{a}s^2-s+\frac{2b}{a}=0$$

Подставим численные значения $a=9{,}6$ и $b=\dfrac{a}{5}=1{,}92$.

$$2{,}4s^4-\frac{1}{5}s^2-s+\frac{2}{5}=0$$

$$12s^4-s^2-5s+2=0$$

Полученное уравнение 4 степени можно решить по известному (хотя и достаточно сложному) алгоритму. Также корень $s=\frac{1}{2}$ не так сложно подобрать или узнать с помощью сервиса `http://www.wolframalpha.com` или аналогичного. Но решение можно найти и школьными методами. Покажем, как это сделать.

По условию решение единственно. Но единственный корень уравнения чётной степени может быть только кратным. Поэтому нужный нам корень (на 1 меньшей кратности) будет и у производной.

$$48s^3-2s-5=0$$

Если у двух многочленов есть общий корень, то такой корень будет и у их НОД (наибольшего общего делителя). Найдём НОД по алгоритму Евклида.

$$\begin{aligned}
12s^4-s^2-5s+2 &= (48s^3-2s-5)\cdot 0{,}25s && +(2s^2+15s-8)\cdot(-0{,}25)\\
48s^3-2s-5 &= (2s^2+15s-8)\cdot(24s-180) && +(2s-1)\cdot 1445\\
2s^2+15s-8 &= (2s-1)\cdot(s+8) && +0
\end{aligned}$$

Итак, мы выяснили, что

$$\text{НОД}\big((12s^4-s^2-5s+2),(48s^3-2s-5)\big)=(2s-1)\cdot\text{const}$$

Соответственно, $(12s^4-s^2-5s+2)$ делится на $(2s-1)$, то есть уравнение

$$12s^4-s^2-5s+2=0$$

имеет корень $s=1/2$.

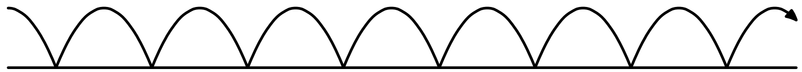
Окончательно получаем:

$$\sin\alpha=s=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\alpha=30^\circ$$

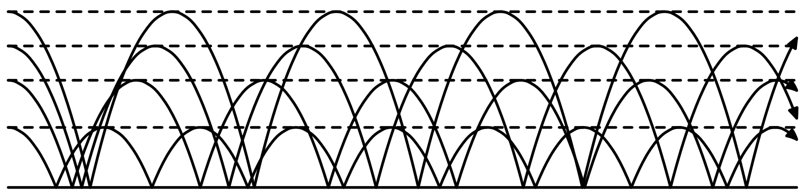
Задача 8

Кратко и упрощённо эффект можно объяснить так.

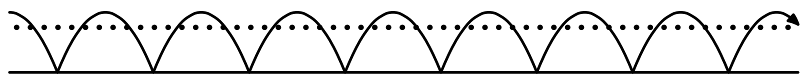
Если рассматривать нейтрон как классическую частицу, он будет прыгать по гладкой горизонтальной плоскости как мячик, его траектория будет состоять из одинаковых дуг параболы.



На самом деле нейтрон — квантовый объект. Он может иметь только дискретный набор энергетических уровней над горизонтальной поверхностью в гравитационном поле Земли. То есть «макушки» парабол могут находиться только на определённых высотах над этой поверхностью.



Если ширина щели между гладкой горизонтальной поверхностью и расположенной над ней шершавой поверхностью (на рисунке показана точками) окажется меньше, чем необходимо для нейтронов самого низкого энергетического уровня, нейтроны через щель перемещаться не смогут (верхушки парабол будут «задевать» за шершавую поверхность).



Шершавой верхняя поверхность сделана для того, чтобы попавшие на неё «ненужные» экспериментаторам нейтроны рассеивались в случайном направлении (а не в каком-то определённом, как могло бы быть с гладкой поверхностью) и как можно меньше таких нейтронов попадало на детектор нейтронов.